**多个火箭残骸的准确定位**

绝大多数火箭为多级火箭，下面级火箭或助推器完成既定任务后，通过级间分离装置分离后坠落。在坠落至地面过程中，残骸会产生跨音速音爆。为了快速回收火箭残骸，在残骸理论落区内布置多台震动波监测设备，以接收不同火箭残骸从空中传来的跨音速音爆，然后根据音爆抵达的时间，定位空中残骸发生音爆时的位置，再采用弹道外推实现残骸落地点的快速精准定位。

**问题1** 建立数学模型，分析如果要精准确定空中单个残骸发生音爆时的位置坐标（经度、纬度、高程）和时间，至少需要布置几台监测设备？假设某火箭一级残骸分离后，在落点附近布置了7台监测设备，各台设备三维坐标（经度、纬度、高程）、音爆抵达时间（相对于观测系统时钟0时）如下表所示：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 设备 | 经度(°) | 纬度(°) | 高程(m) | 音爆抵达时间(s) |
| A | 110.241 | 27.204 | 824 | 100.767 |
| B | 110.780 | 27.456 | 727 | 112.220 |
| C | 110.712 | 27.785 | 742 | 188.020 |
| D | 110.251 | 27.825 | 850 | 258.985 |
| E | 110.524 | 27.617 | 786 | 118.443 |
| F | 110.467 | 27.921 | 678 | 266.871 |
| G | 110.047 | 27.121 | 575 | 163.024 |

从上表中选取合适的数据，计算残骸发生音爆时的位置和时间。

**问题2** 火箭残骸除了一级残骸，还有两个或者四个助推器。在多个残骸发生音爆时，监测设备在监测范围内可能会采集到几组音爆数据。假设空中有4个残骸，每个设备按照时间先后顺序收到4组震动波。建立数学模型，分析如何确定监测设备接收到的震动波是来自哪一个残骸？如果要确定4个残骸在空中发生音爆时的位置和时间，至少需要布置多少台监测设备？

**问题3** 假设各台监测设备布置的坐标和4个音爆抵达时间分别如下表所示：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 设备 | 经度(°) | 纬度(°) | 高程(m) | 音爆抵达时间(s) |
| A | 110.241 | 27.204 | 824 | 100.767 | 164.229 | 214.850 | 270.065 |
| B | 110.783 | 27.456 | 727 | 92.453 | 112.220 | 169.362 | 196.583 |
| C | 110.762 | 27.785 | 742 | 75.560 | 110.696 | 156.936 | 188.020 |
| D | 110.251 | 28.025 | 850 | 94.653 | 141.409 | 196.517 | 258.985 |
| E | 110.524 | 27.617 | 786 | 78.600 | 86.216 | 118.443 | 126.669 |
| F | 110.467 | 28.081 | 678 | 67.274 | 166.270 | 175.482 | 266.871 |
| G | 110.047 | 27.521 | 575 | 103.738 | 163.024 | 206.789 | 210.306 |

利用问题2所建立的数学模型，从上表中选取合适的数据，确定4个残骸在空中发生音爆时的位置和时间（4个残骸产生音爆的时间可能不同，但互相差别不超过5 s）。

**问题4** 假设设备记录时间存在0.5 s的随机误差，请修正问题2所建立的模型以较精确地确定4个残骸在空中发生音爆时的位置和时间。通过对问题3表中数据叠加随机误差，给出修正模型的算例，并分析结果误差。如果时间误差无法降低，提供一种解决方案实现残骸空中的精准定位（误差$<1$ km），并自行根据问题3所计算得到的定位结果模拟所需的监测设备位置和音爆抵达时间数据，验证相关模型。

**附** 震动波的传播速度为340 m/s，计算两点间距离时可忽略地面曲率，纬度间每度距离值近似为111.263 km，经度间每度距离值近似为97.304 km。